代数曲線の基本群に関する **Grothendieck** 予想について

中村　博昭（都立大理）
玉川安騎男（京大数理研）
望月　新一（京大数理研）

1. Introduction
   1.1. 代数多様体の基本群への外 Galois 作用
   1.2. 代数多様体の数論的基本群
2. Grothendieck 予想
3. 中村の仕事の紹介
4. 玉川の仕事の紹介
5. 望月の仕事の紹介

1. Introduction

Grothendieck 予想

K : 有理数体 $\mathbf{Q}$ 上有限生成な体

双曲的
代数曲線 $/K$ $\quad\longmapsto\quad$ (幾何的) 基本群
+ 外 Galois 作用

$\cdot\|\cdot$

数論的基本群

[幾何的対象] [代数的対象]

$\longleftarrow$

完全に決定
(復元)

1.1. 代数多様体の基本群への外 Galois 作用

代数多様体の（位相的）基本群

X : 代数多様体 $/\mathbf{C}$

（複素多様体としての位相により位相空間）

$x \in X$: 基点

$$\rightsquigarrow \text{（位相的）基本群} \quad \begin{array}{c} \pi_1^{\mathrm{top}}(X, x) \\ \| \\ \pi_1^{\mathrm{top}}(X) \end{array}$$

X の被覆全体を統制：

$$\begin{array}{ccc} (f : Y \to X) & \mapsto & f^{-1}(x) \\ \pitchfork & & \pitchfork \\ (\text{被覆}/X) & \xrightarrow{\sim} & \begin{pmatrix} \pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)\text{ - 作用} \\ \text{付き集合} \end{pmatrix} \\ \cup & & \cup \\ \begin{pmatrix} \text{有限次} \\ \text{被覆 } /X \end{pmatrix} & \xrightarrow{\sim} & \begin{pmatrix} \pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)\text{ - 作用} \\ \text{付き有限集合} \end{pmatrix} \end{array}$$

profinite 完備化

$$\pi_1(X) \overset{\mathrm{def}}{=} \pi_1^{\mathrm{top}}(X)\hat{}$$

ここで、群 Γ に対して

$$\Gamma\hat{} \overset{\mathrm{def}}{=} \varprojlim(\Gamma \text{ のすべての有限商})$$

(コンパクト全不連結位相群)

自然な射 $\Gamma \to \Gamma\hat{}$ の像は稠密であり、

$$\begin{pmatrix} \Gamma\text{ - 作用} \\ \text{付き有限集合} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma\hat{}\text{- 連続作用} \\ \text{付き有限集合} \end{pmatrix}$$

特に

$$\begin{pmatrix} \text{有限次} \\ \text{被覆 } /X \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \pi_1(X)\text{ - 連続作用} \\ \text{付き有限集合} \end{pmatrix}$$

Galois 作用

X が $K(\subset \mathbf{C})$ 上定義されている場合

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K) \curvearrowright X$$

だが、 X の複素多様体としての位相に関して連続でないので

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K) \curvearrowright \pi_1^{\mathrm{top}}(X)$$

は引き起こされない

Riemann の存在定理

X の有限次被覆は「代数的」 i.e.

$\forall\ f : Y \to X$ 有限次被覆
$\exists_1\ Y$ の上の代数多様体の構造
s.t. f は代数多様体の射

$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K)$ に対し

$$\sigma(f : Y \to X) = (f^\sigma : Y^\sigma \to X^\sigma = X)$$

と定義することにより

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K) & \curvearrowright & (\text{有限次被覆}\,/X) \\ & & \| \\ & & \left(\begin{array}{c}\pi_1(X)\text{ - 連続作用} \\ \text{付き有限集合}\end{array}\right) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K) \curvearrowright \pi_1(X)$$

正確には、

$$\pi_1(X, x) \overset{\sigma}{\xrightarrow{\sim}} \pi_1(X, \sigma(x)) \underset{\text{不定性}}{\simeq} \pi_1(X, x)$$

したがって

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K) & \to & \mathrm{Out}(\pi_1(X)) \\
 & & \| \\
 & & \mathrm{Aut}(\pi_1(X))/\,\mathrm{Inn}(\pi_1(X))
\end{array}
$$

これは

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$$

を経由

（Riemann の存在定理で各有限次被覆に入る代数多様体の構造は、実は $\overline{K}$ 上定義される）

1.2. 代数多様体の数論的基本群

K : 任意の体
X : 代数多様体 $/K$

<u>finite étale 被覆</u>

X の「有限次被覆」を純代数的に定義

例　$X = \mathbf{A}^1_K - \{0\} = \mathrm{Spec}(K[T, T^{-1}])$

例 1
$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}^1_K - \{0\} & \to & \mathbf{A}^1_K - \{0\} & = X \\ K[S, S^{-1}] & \leftarrow & K[T, T^{-1}] & \\ K & = & K & \\ S^N & \hookleftarrow & T & \end{array}$$

例 2
$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}^1_K - \{0\} & \to & \mathbf{A}^1_K - \{0\} & = X \\ K[S, S^{-1}] & \leftarrow & K[T, T^{-1}] & \\ K & = & K & \\ aS^N & \hookleftarrow & T & \end{array}$$
$(a \in K^\times)$

例 3
$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}^1_{K'} - \{0\} & \to & \mathbf{A}^1_K - \{0\} & = X \\ K'[T, T^{-1}] & \leftarrow & K[T, T^{-1}] & \\ K' & \supset & K & \\ T & \hookleftarrow & T & \end{array}$$
(K'： K の有限次分離拡大)

例 4　これらの混合

基本群

$\pi_1(X)$： profinite 位相群 s.t.

$$\begin{pmatrix} \text{finite étale} \\ \text{被覆 }/X \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \pi_1(X)\text{ - 連続作用} \\ \text{付き有限集合} \end{pmatrix}$$

X が非特異ならば

$$\mathrm{Gal}(K(X)) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$$

特に

$$\mathrm{Gal}(K) = \pi_1(\mathrm{Spec}(K))$$

次の完全列が基本的（$X \to \mathrm{Spec}(K)$ に対する fiber homotopy 列）

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{K}}) \to \pi_1(X) \stackrel{\mathrm{pr}_X}{\to} \mathrm{Gal}(K) \to 1$$

$\pi_1(X)$: 数論的基本群

$\pi_1(X_{\overline{K}})$: 幾何的基本群

$\rightsquigarrow \ \rho_X : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X_{\overline{K}}))$

注 1　$K \subset \mathbf{C}$ の時は $\pi_1(X_{\overline{K}}) = \pi_1(X_{\mathbf{C}})$ で
ρ_X は 1.1 の表現と一致

注 2　$\pi_1(X_{\overline{K}})$ の中心が自明ならば

$$(\pi_1(X), \mathrm{pr}_X) \leftrightsquigarrow (\pi_1(X_{\overline{K}}), \rho_X)$$

pro-l 基本群（l：素数）

$$(\text{pro-}l\ \text{群}) = \varprojlim(\text{有限}\ l\ \text{-}\ \text{群})$$

Π： profinite 群

$\rightsquigarrow$ Π^l： Π の最大 pro-l 商

$\stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim(\Pi$ のすべての位数 l べき有限商$)$

$$\pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}}) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(X_{\overline{K}})^l$$

$$\pi_1^{(l)}(X) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\pi_1(X)/\operatorname{Ker}(\pi_1(X_{\overline{K}}) \to \pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}}))$$

$$1 \to \pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}}) \to \pi_1^{(l)}(X) \stackrel{\mathrm{pr}_X^{(l)}}{\to} \operatorname{Gal}(K) \to 1$$

$$\rho_X^{(l)} : \operatorname{Gal}(K) \to \operatorname{Out}(\pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}}))$$

2. Grothendieck 予想

予想
K : $\mathbf{Q}$ 上有限生成な体
C : 双曲的代数曲線 $/K$
S : smooth 代数多様体 $/K$

この時、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{dom}}(S, C)\\ \xrightarrow{\sim}\ &\mathrm{Hom\,ext}^{\mathrm{open}}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1(S), \pi_1(C))\end{aligned}$$

C^* : C のコンパクト化, g : C^* の種数
$\Sigma = C^* - C$, $\nu = \sharp(\Sigma(\overline{K}))$

C : 双曲的 $\iff \chi(C) \overset{\mathrm{def}}{=} 2 - 2g - \nu < 0$

$$\left(\begin{array}{lcll} S & \rightarrow & C & : \ \text{dominant 射} \\ & \circlearrowright & & \\ & \searrow \swarrow & & \\ \mathrm{Spec}(K) & & & \end{array}\right)$$

$$\downarrow \wr$$

$$\left(\begin{array}{lcll} \pi_1(S) & \rightarrow & \pi_1(C) & : \text{連続開群準同型} \\ & \circlearrowright & & \\ & \searrow \swarrow & & \\ \mathrm{Gal}(K) & & & \end{array}\right)$$

$$\text{modulo } \mathrm{Inn}(\pi_1(C_{\overline{K}}))$$

意味

「K 上の双曲的代数曲線はその数論的基本群から完全に復元される」

（見方）

(1) $S = C'$ （双曲的代数曲線）

$$\left(\begin{array}{c}\text{双曲的代数}\\ \text{曲線}\,/K\end{array}\right)^{\mathrm{dom}} \xrightarrow{\pi_1} \left(\begin{array}{c}\text{profinite 群}\\ /\,\mathrm{Gal}(K)\end{array}\right)^{\mathrm{open}}_{\mathrm{ext}}$$

が忠実充満。

特に

「数論的基本群が同型な K 上の双曲的代数曲線は同型」

(2) 左辺 $= C$ の S - 有理点集合

注

(i) アーベル多様体の Tate 予想（Faltings の定理）と類似

$$\mathrm{Hom}_K(A', A) \otimes_{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1(A'_{\overline{K}}), \pi_1(A_{\overline{K}}))$$

(ii) 高次元多様体への一般化（未解決）

予想「anabelian な代数多様体は数論的基本群から完全に復元される」

“anabelian”とは？

未定義。「abelian からほど遠い基本群によってその幾何が統制されるような多様体」

例：双曲的曲線の successive fibration
双曲的曲線のモジュライ空間

(iii) Section 予想（未解決）

簡単のため C : 射影的（ $\iff C = C^*$ ）

予想

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_K(S, C)\\ \xrightarrow{\sim}&\mathrm{Hom\,ext}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1(S), \pi_1(C))\end{aligned}$$

特に $S = \mathrm{Spec}(K)$ とすれば

$$C(K) \xrightarrow{\sim} \{\mathrm{pr}_C : \pi_1(C) \to \mathrm{Gal}(K) \text{ の連続、群論的 sections}\}_{\mathrm{ext}}$$

（$\Sigma \neq \emptyset$ の時は修正要 "tangential sections"）

3. 中村の仕事

K : $\mathbf{Q}$ 上有限生成な体
C : $g=0$ ($\nu \geq 3$)
簡単のため
$C=\mathbf{P}^1_K-\Sigma,\ \mathbf{P}^1(K)\supset\Sigma\supset\{0,1,\infty\}$

定理(Anderson - 伊原)

$$\rho_C^{(l)}:\mathrm{Gal}(K)\to\mathrm{Out}(\pi_1^{(l)}(C_{\overline{K}}))$$

の核に対応する K の(無限次 Galois)拡大体 $K_C^{(l)}$ は、Σ から「複比」と「l 乗根」を繰り返して生じる「数」を K に添加した体

例 $\mathbf{Q}^{(l)}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}-\{0,1,2,\infty\}}\neq\mathbf{Q}^{(l)}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}-\{0,1,3,\infty\}}(l\neq 3)$

方針: Σ の座標を完全に復元するほどの情報を持った K の拡大体を C の数論的基本群から群論的に切り出せないか?

C : 双曲的曲線（g : 一般）, $x \in \Sigma$

$$\rightsquigarrow \pi_1(C) \supset \underset{\text{(分解群)}}{D_x} \supset \underset{\text{(惰性群)}}{I_x} \simeq \hat{\mathbf{Z}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \to & I_x & \to & D_x & \to & \mathrm{Gal}(\kappa(x)) & \to 1 \\ & \cap & & \cap & & \cap\text{open} & \\ 1 \to & \pi_1(C_{\overline{K}}) & \to & \pi_1(C) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_C} & \mathrm{Gal}(K) & \to 1 \end{array}$$

また $D_x = N_{\pi_1(C)}(I_x)$

補題 (惰性群の群論的特徴付け)

巡回部分群 $J \subset \pi_1(C_{\overline{K}})$ に対し

$J = I_x (\exists x \in \Sigma) \iff$

「$\forall H \underset{\text{open}}{\subset} \pi_1(C_{\overline{K}})$ に対して $J \cap H$ が H^{ab} の‘円分的部分’に入る」ものの中で極大

Riemann-Weil 予想により後の条件は群論的

$C = \mathbf{P}^1_K - \{0, 1, \infty, \lambda\}$ （$\lambda \in K - \{0, 1\}$）
（$\nu > 4$ の時は補題を使って $\nu = 4$ に帰着）

Step1 $\pi_1(C) \rightsquigarrow K(\zeta_n, \lambda^{\frac{1}{n}})$ $(n \in \mathbf{N})$
$0, \infty$ のみで（完全）分岐する $\mathbf{P}^1_{K(\zeta_n)}$ の n 次巡回被覆における $1, \lambda$ の fibers の剰余体の合成体を考え、そのような被覆全てを走ってその共通部分を取る（補題により「群論的」）

Step2 $\{K(\zeta_n, \lambda^{\frac{1}{n}})\}_{n \in \mathbf{N}} \rightsquigarrow \langle \lambda \rangle$
Kummer 理論、単数群の有限生成性

Step3

$$\left.\begin{array}{cl} \mathbf{P}^1_K - \{0, 1, \infty, \lambda\} & \rightsquigarrow \langle \lambda \rangle \\ \wr\| & \\ \mathbf{P}^1_K - \{0, 1, \infty, 1 - \lambda\} & \rightsquigarrow \langle 1 - \lambda \rangle \\ \wr\| & \\ \mathbf{P}^1_K - \{0, 1, \infty, \frac{\lambda}{\lambda - 1}\} & \rightsquigarrow \langle \frac{\lambda}{\lambda - 1} \rangle \end{array}\right\} \rightsquigarrow \lambda$$

<u>pro-l 類似</u>

$$\mathrm{Aut}_K(C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut\,ext}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1^{(l)}(C))$$

となる例を与えた

手法： pro-l 写像類群（$\subset \mathrm{Out}(\pi_1^{(l)}(C_{\overline{K}}))$）
の weight filtration を用いて pro-l 外 Galois
表現における Galois 像を記述

高種数の曲線やその配置空間の場合にも研究
（角皆宏・高尾尚武と共同）

4. 玉川の仕事

Grothendieck 予想 / 有限体

k : 有限体
C : 双曲的曲線 $/k$, $\nu > 0$
（$\nu = 0$ は未解決）

定理（内田）
$k(C)$ は $\mathrm{Gal}(k(C))$ から復元される

証明の方針 :

Step1 C^* の各点に対する分解群の群論的特徴付け

Step2 乗法群 $k(C)^\times$ の復元

Step3 $k(C) = k(C)^\times \cup \{0\}$ の上の加法構造の復元

Step1

簡単のため $x \in C$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1\} \arrow[d, equal] & & & \\
1 \arrow[r] & I_x \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & D_x \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathrm{Gal}(\kappa(x)) \arrow[r] \arrow[l, dashed, shift right=3, "\alpha_x"'] \arrow[d, phantom, "\cap\mathrm{open}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(C_{\overline{K}}) \arrow[r] & \pi_1(C) \arrow[r, "\mathrm{pr}_C"] & \mathrm{Gal}(k) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

$x \in C(k)$ ならば

$\alpha_x : \mathrm{Gal}(k) \to \pi_1(C),\ \mathrm{pr}_C \circ \alpha_x = \mathrm{id}_{\mathrm{Gal}(k)}$

逆に

$$\alpha : \mathrm{Gal}(k) \to \pi_1(C),\ \mathrm{pr}_C \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Gal}(k)}$$

に対して

$$\alpha = \alpha_x (\exists x \in C(k))$$

$\iff$ $\alpha(\mathrm{Gal}(k))$ に対応する C の（pro -）被覆が k - 有理点を持つ

$\iff$ $\alpha(\mathrm{Gal}(k)) \subset \forall H \underset{\text{open}}{\subset} \pi_1(C)$ H に対応する被覆が k - 有理点を持つ

Lefschetz 跡公式により最後の条件は群論的

<u>Step2</u> $k(C)$ の類体論の相互律：$k(C)^\times =$ Artin 写像の核

<u>Step3</u> 略

$$\pi_1^{\text{tame}}/\ \text{有限体の Grothendieck 予想}$$
$$\Downarrow$$
$$\pi_1/\ \text{有限生成体}_{/\mathbf{Q}}\ \text{の Grothendieck 予想}$$

注　幾何的基本群について

C : 曲線 / 標数 0 の代数閉体
$\Longrightarrow$ $\pi_1(C)$ は (g,ν) のみで決まる

定理
曲線 $C/\overline{\mathbf{F}}_p$, $g = 0$ の（スキームとしての）同型類は $\pi_1(C)$ によって完全に決定される
（g : 一般は未解決）

5. 望月の仕事

Grothendieck 予想 $/p$ 進体

<u>結果</u>

K : $\mathbf{Q}_p$ 上有限生成な体の部分体

例 K : $\mathbf{Q}$ 上有限生成

K : $\mathbf{Q}_p$ 上有限生成

$$K = \bigcup_{[K':\mathbf{Q}]\leq N} K'$$

定理１
C：双曲的代数曲線 $/K$
S： smooth 代数多様体 $/K$
この時、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{dom}}(S, C)\\ \xrightarrow{\sim}\ &\mathrm{Hom\,ext}^{\mathrm{open}}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1(S), \pi_1(C))\\ \xrightarrow{\sim}\ &\mathrm{Hom\,ext}^{\mathrm{open}}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1^{(p)}(S), \pi_1^{(p)}(C))\end{aligned}$$

定理２
L, M：（任意次元）代数多様体 $/K$ の関数体
この時、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_K(M, L)\\ \xrightarrow{\sim}\ &\mathrm{Hom\,ext}^{\mathrm{open}}_{\mathrm{Gal}(K)}(\mathrm{Gal}(L), \mathrm{Gal}(M))\end{aligned}$$

注

(i) アーベル多様体の Tate 予想は p 進体上では成立しない。

(ii) K が $\mathbf{Q}$ 上有限生成の時、定理 2 の Isom 版は Pop の定理

証明： p 進 Hodge 理論の応用

$([K:\mathbf{Q}_p] < \infty)$

Grothendieck 予想

多様体の射 $\overset{\text{比較}}{\longleftrightarrow}$ 基本群（の射）

「関数」的

位相的
étale 的
Galois 表現的

p 進 Hodge 理論

p 進体上の代数多様体に対して

de Rham
(crystalline)
cohomology

$\overset{\text{比較}}{\longleftrightarrow}$

p 進 étale
cohomology

微分加群的
「関数」的

位相的
étale 的
Galois 表現的

簡単のため $C = C^*$, non-hyperelliptic

$$\pi_1^{(p)}(C_{\overline{K}})^{\mathrm{ab}} \simeq T_p(J_{\overline{K}})$$

（J： C の Jacobi 多様体）

$\rightsquigarrow$ Hodge-Tate 分解（$\mathbf{C}_p = (\overline{K})^\wedge$）：

$$\pi_1^{(p)}(C_{\overline{K}})^{\mathrm{ab}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \mathbf{C}_p \simeq$$

$$\{\Gamma(C, \Omega^1_{C/K}) \underset{K}{\otimes} \mathbf{C}_p\} \oplus \{H^1(C, \mathcal{O}_C) \underset{K}{\otimes} \mathbf{C}_p(1)\}$$

ゆえに

$$(\pi_1^{(p)}(C_{\overline{K}})^{\mathrm{ab}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \mathbf{C}_p)^{\mathrm{Gal}(K)}$$

$$= \Gamma(C, \Omega^1_{C/K}) = K\omega_1 \oplus \cdots \oplus K\omega_g$$

$\rightsquigarrow$ canonical embedding： $C \hookrightarrow \mathbf{P}_K^{g-1}$

像の復元のための Key：

L： K を含む p 進完備な離散付値体、剰余体
　　は K の剰余体の上の一変数代数関数体

この時、与えられた

$$\mathrm{Gal}(L) \underset{\mathrm{Gal}(K)}{\rightarrow} \pi_1(C)$$

が幾何的かどうか、 i.e.

$$\mathrm{Spec}(L) \underset{\mathrm{Spec}(K)}{\rightarrow} C$$

から来るものかどうかを群論的に判定
（mod p^N 版 p 進 Hodge 理論を C の各被覆
に適用、など)

定理２：
M/K の超越次数に関する帰納法
$\rightarrow$ 定理１に帰着